**12. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса последовательного исключения.**

Это наиболее распространенный из прямых численных методов решения систем линейных уравнений.

В численном методе Гаусса системы линейных уравнений (СЛУ)  **преобразуется в эквивалентную ей треугольную системы с использованием элементарных линейных преобразований векторов типа сдвига, масштабирования и перестановки.**

Алгоритмы решения задачи состоит из 2-х этапов:

I этап (прямой код)

Матрица А преобразуется в эквивалентную ей верхнюю правую треугольную матрицу

Такими же преобразованиями подвергается вектор-столбец свободных членов В, который обычно присоединяется к матрице А справа как (n+1)-ый вектор.

II этап (обратный ход)

Находятся корни уравнений методом обратной подстановки.

Прямой ход метода Гаусса имеет разные модификации. Рассмотрим первоначально алгоритм последовательного исключения неизвестных по столбцам, выполняемый по схеме единственного деления

Получим верхнюю правую треугольную матрицу

С единичными диагональными элементами.

Для этого:

1. Преобразование матрицы А начинаем с левого верхнего угла, т.е. с углового элемента по схеме «сверху вниз и слева направо»
2. Двигаться сверху вниз, под диагональю в каждом i-м столбце будем получать нули;
3. Движение слева направо, включая столбец свободных членов, обеспечивает эквивалентные преобразования всех элементов строки, начиная от i-го столбца

Поэтому такой алгоритм называют **алгоритмом преобразования матрицы по строкам** или алгоритмом исключения неизвестных по столбцам

1. Для получения нулевых элементов под диагональю 1-го столбца первоначально делим все элементы 1-ой строки (i=1) на диагональный элемент (он называется ведущим элементом), при условии, что :

где

1. После этого из каждой последующей k-ой строчки, начиная со второй, вычитается преобразованная первая строка, умноженная на соответствующий коэффициент преобразования , взятый из 1-ого столбца:

где

При j=1 элементы будут обращаться в ноль. Докажем это методом подстановки:

При последовательном исключении неизвестных в первом столбце первая, т.е. i-ая строчка будет исчисляться n-1 раз в паре с остальными строками матрицы А или в общем виде (n-i) раз

В каждой паре преобразуемых строк с номерами i и k верхнюю i-ую строку по которой ведется управление преобразованием принято называть ведущей строкой, а все остальные нижние преобразуемые строки называют ведомыми.

Диагональный элемент в i-ой строки и i-м столбце называют ведущими элементами, а остальные элементы i-го столбца, т.е. называются коэффициентами преобразования или коэффициентами кратности .

Описанный алгоритм формирования нулей под диагональю в 1-ом столбце повторяется еще n-2 раз

Для получения нулей во 2-ом столбце:

1. Ведущая строка – вторая (i=2);
2. Ведущий элемент - ;
3. Коэффициенты преобразования – элементы второго столбца начиная с 3-ей строки

На месте этих коэффициентов в преобразованной матрице будут получаться нули

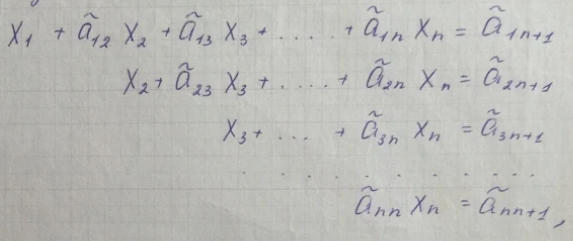
В общем виде для получения нулевых поддиагональных элементов в i-ом столбце следует все элементы в i-ом столбце следует все элементы i-ой ведущей строки разделить на диагональный ведущий элемент , а затем из элементов каждой последующей k-ой ведомой строки [] вычесть в соответствие со столбцом элементы преобразованной i-й ведущей строки, кратные коэффициенту преобразования строки , что математически можно записать в виде следующих рекуррентных формул:

где

Где переменная с «волной» означает текущее значение без «волны» – предыдущее значение коэффициента

При j=i поддиагональные элементы обращаются в нуль (=0), а диагональные элементы будут получаться равными единице (=1), кроме

В результата счета по рассмотренному алгоритму матрица А преобразуется в верхнюю правую треугольную матрицу с единичными диагональными элементами:



Где вектор является преобразованным вектор-столбцом свободных членов .

В сокращенной записи полученная треугольная система уравнений имеет вид (без учета последнего уравнения)

где

На этом заканчивается 1-ый этап вычислений алгоритма метода Гаусса

На втором этапе метода обратной подстановки определяются корни системы уравнений по следующим рекуррентных формулам:

Где значения индекса i изменяются в обратном порядке